

## Rachunek różniczkowy

**Definicja 1.** Niech będzie dana funkcja  $f: D \rightarrow Y$ , gdzie  $D \subset \mathbb{R}$ , a  $Y$  jest przestrzenią unormowaną. Mówimy, że funkcja  $f$  jest **różniczkowalna** w punkcie  $a \in D$ , jeżeli pewne otoczenie punktu  $a$  w  $D$  jest przedziałem niezdegenerowanym (tzn. nie redukującym się do punktu  $a$ ), oraz istnieje **pochodna funkcji  $f$  w punkcie  $a$** , tj.

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

**Definicja 2.** Inny sposób zapisania **ilorazu różnicowego**. Wartość pochodnej funkcji  $f$  w punkcie  $x_0$ :

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

## Pochodne podstawowych funkcji

funkcja $f(x)$	pochodna $f'(x)$	funkcja $f(x)$	pochodna $f'(x)$
$a$ - stała	0	$x$	1
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$x^a$	$ax^{a-1}$
$e^x$	$e^x$	$a^x$	$a^x \ln a$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$
$x^x$	$x^x(1 + \ln x)$	$x^{x^x}$	$x^{x^x} \cdot x^x \left(\frac{1}{x} + \ln x + \ln^2 x\right)$
$\sin x$	$\cos x$	$\cos x$	$-\sin x$
$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{ctg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\operatorname{arctg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\operatorname{arcctg} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$

## Własności pochodnych - ułatwienia liczenia pochodnych

Wyrażenie różniczkowane		Pochodna
Iloczyn funkcji przez liczbę	$af(x)$	$af'(x)$
Suma funkcji	$f(x) + g(x)$	$f'(x) + g'(x)$
Iloczyn funkcji	$f(x)g(x)$	$f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
Iloraz funkcji	$\frac{f(x)}{g(x)}$	$\frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$
Funkcja złożona	$f(g(x))$	$f'(g(x)) \cdot g'(x)$
Logarytm funkcji	$\ln  f(x) $	$\frac{f'(x)}{f(x)}$